Mathématiques 1

Présentation du sujet

Cette épreuve propose plusieurs applications de la fonction exponentielle définie sur différents ensembles. Elle comporte quatre parties indépendantes.

Dans la première, on construit l'exponentielle réelle à l'aide d'une équation fonctionnelle puis cette fonction est utilisée pour modéliser une expérience aléatoire. Dans la deuxième partie, on étudie une courbe paramétrée définie à l'aide de l'exponentielle complexe. Dans la troisième partie, on calcule l'exponentielle d'une famille de matrices de taille 2. La quatrième partie est consacrée à la réduction d'une matrice de taille 3 permettant de résoudre un système différentiel.

Le sujet couvre une grande partie du programme de première et deuxième année. Toutes les parties sont accessibles, particulièrement la dernière. Les méthodes proposées sont souvent élémentaires et de nombreuses questions peuvent être traitées avec les connaissances de première année.

Analyse globale des résultats

Le sujet permet de différencier les candidats. Cette épreuve sans difficulté majeure et de longueur raisonnable révèlent les meilleures copies qui proposent une argumentation précise et une rédaction rigoureuse.

La plupart des candidats ont traité un nombre très important de questions. Ils ont pu développer leurs connaissances et leur savoir-faire.

Les notions élémentaires en probabilité et en algèbre linéaire sont mal maitrisées dans de nombreuses copies. Dans les plus faibles d'entre elles, on décèle des confusions entre les objets (noyau, vecteur, matrice, système linéaire) soulignant de grandes difficultés dans la compréhension de certains domaines du programme de classe préparatoire.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Remarques générales

Quelques candidats persistent à mal numéroter les pages et les questions. Le jury insiste sur la nécessité d'une numérotation rigoureuse qui permette au correcteur de se repérer dans la copie. Une mauvaise présentation ne peut qu'être pénalisée.

Plusieurs candidats s'imaginent qu'il est possible de répondre en recopiant simplement l'énoncé ou d'une simple phrase affirmative sans justification. Par exemple, la réponse à la question **Q 7.** ne peut pas être « $k = 1$ et $f'(0) = 1$ », sans démonstration ; la réponse à la question **Q 25.** doit permettre au correcteur de comprendre la méthode utilisée pour décrire les projecteurs demandés.

La calculatrice pouvait être utilisée dans plusieurs questions. Cependant, il faut préciser quelle grandeur est obtenue et à partir de quels éléments.

Les questions nécessitant des calculs doivent faire apparaitre les différentes étapes amenant au résultat. En **Q 16.** par exemple, la preuve de l'égalité $z(t+2\pi) = z(t)$ doit reposer sur des égalités faisant intervenir la formule $e^{a+b} = e^a e^b$ et $e^{2ik\pi} = 1$ quand $k \in \mathbb{Z}$. Chaque réponse doit être justifiée par un argument mathématique, qu'il s'agisse d'une hypothèse de l'énoncé, d'un point de cours ou d'un résultat montré dans une question précédente. Le sujet comporte quelques questions de cours. Elles permettent le contrôle de son assimilation et incitent à appliquer un résultat connu pour répondre à une prochaine question.

Il est possible d'apporter une réponse partielle ou de proposer un début de réponse. À défaut de pouvoir répondre complètement, des tentatives doivent toujours faire sens dans le cadre de la réponse attendue.

Remarques sur certaines questions

Q 1. à **Q 7.** Trop de candidats ont considéré que la fonction f solution de l'équation fonctionnelle est la fonction exponentielle. C'est seulement à la fin de **Q 7.** que l'égalité $f = \exp$ est démontrée. Les candidats devraient passer plus de temps à lire l'objectif annoncé pour comprendre la démarche proposée.

Q 5. Cette question a été très rarement réussie alors qu'il suffisait de dériver par rapport à s en fixant t comme un paramètre. Trop peu de candidats considèrent la fonction $(t, s) \mapsto f(s+t)$ pour former leur raisonnement.

Q 6. Il s'agissait d'établir que f est solution de l'équation différentielle $y' = f'(0)\,y$ et de résoudre cette équation. Les correcteurs attendent une maitrise du cours relatif aux équations différentielles, d'autant que la forme des solutions est donnée. Les candidats devaient préciser le cadre – une équation linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants normalisée – puis rappeler la forme de l'ensemble des solutions énoncée dans le cours avant de revenir au cas particulier considéré par le sujet.

Q 7. Beaucoup de candidats partent du problème de Cauchy pour déterminer k et $f'(0)$. Ils confondent le résultat avec l'hypothèse.

Q 8. Même si l'argument d'unicité a été souvent repéré, il ne fallait pas oublier l'existence en se référant à **Q 1.**

Q 10. L'expression de la dérivée de h est généralement correct mais la construction du tableau de variation est rarement justifié. L'inégalité stricte est mentionnée mais n'est pas démontrée. Il s'agissait de prouver que h admet 0 comme minimum atteint seulement en 0.

Q 11. Dire que α et θ sont strictement positifs ne suffit pas, on attend deux fois l'argument de positivité stricte du produit $\alpha\theta$: la première fois pour appliquer **Q 10.**, la seconde fois pour écrire l'inégalité $1 - e^{-\alpha\theta} > 0$ et pouvoir diviser par le produit $\alpha\theta$ sans changement de sens de l'inégalité.

Q 12. - Q 14. La description d'une loi conditionnelle en analysant l'expérience aléatoire, est chaotique. Trop peu de candidats repèrent la succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même loi. L'écriture de la formule des probabilités totales est très souvent approximative, le système complet d'évènements utilisé doit être précisé. Le résultat de **Q 13.** permettait de déterminer la loi cherchée.

Q 16. - Q 22. L'épreuve précise les étapes pour tracer une courbe paramétrée décrivant la trajectoire d'un arc défini à l'aide de l'exponentielle complexe. L'égalité $z(-t) = \overline{z(t)}$ est rarement obtenue. Beaucoup de candidats semblent mal à l'aise avec l'exponentielle complexe et se tournent vers la forme algébrique bien moins efficace. La calculatrice n'a pas été assez utilisée que ce soit en **Q 18. - Q 19.** pour effectuer un calcul de distance ou pour tracer la courbe. Plusieurs candidats ignorent les propriétés de morphisme de l'exponentielle, qui faisaient pourtant l'objet de la première partie.

Q 23. La formule donnant la longueur d'une courbe simple est peu connue, son calcul en simplifiant et en intégrant n'a jamais été mené à son terme.

Q 24. Bien que le calcul des vecteurs directeurs n'a pas présenté de difficulté, la preuve de la supplémentarité des droites propres a donné lieu à de nombreuses réponses partielles ou incohérentes. Trop peu de candidats ont reconnu les espaces propres d'une matrice diagonalisable.

Q 25. - Q 26. Certains candidats ont cru pouvoir deviner les matrices Q_i en anticipant la question **Q 26.** Si celle-ci peut permettre d'éviter les erreurs, elle ne peut pas servir de point de départ. Cependant, plusieurs candidats qui échouent à déterminer ces matrices, cherchent à montrer les égalités de la question **Q 26.** par un argument géométrique ou algébrique. Cette démarche a été évaluée favorablement.

Q 27. On peut utiliser la formule du binôme de Newton à condition de justifier son emploi. Un raisonnement par récurrence a été souvent employé. Il devait faire apparaitre les produits Q_1Q_2 et Q_2Q_1 avant d'utiliser les égalités de **Q 26.**

Q 32. Certains candidats identifient une isométrie directe mais échouent à reconnaitre une rotation ou ne donnent pas son angle.

Q 33. La décomposition d'une somme à l'aide des termes d'indice pair et impair a été souvent erronée.

Q 36. - Q 37. Les calculs de rang ont donné lieu à bien trop de réponses incomplètes. Beaucoup de candidats se contentent d'écrire que deux colonnes sont identiques et la troisième nulle, sans préciser que la première est non nulle. Plusieurs copies proposent un calcul sans aucune explication. Présenter la méthode choisie, en lien avec un résultat du cours, fait partie des exigences de l'épreuve. L'utilisation de la calculatrice aurait permis d'obtenir la bonne valeur des rangs demandés.

Dans la question **Q 36.**, pour justifier que la famille de vecteurs est une base d'un sous-espace, on attendait une réponse avec trois arguments justifiés : la famille (v_1, v_2) est constituée de vecteurs de $\mathrm{Ker}(A-I)$, elle est libre (ou génératrice) et son cardinal égal à $\dim(\mathrm{Ker}(A-I))$ déterminée en appliquant le théorème du rang.

Q 38. On lit beaucoup trop souvent que les trois vecteurs « ne sont pas colinéaires », ce qui n'a pas de sens pour plus de deux vecteurs. Démontrer plutôt que les vecteurs sont linéairement indépendants ou que la famille formée par ces vecteurs est libre. Dans cette question, l'utilisation du déterminant est appropriée.

Q 39. On pouvait à l'aide des questions précédentes construire la matrice P et vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale, par exemple à l'aide de la calculatrice. Très peu de copies ont recours à ce raisonnement. On pouvait aussi observer que les questions **Q 36.** à **Q 38.** prouvent l'existence d'une base de vecteurs propres. Au lieu de cela, trop de candidats ignorent ces questions et se lancent inutilement dans le calcul du polynôme caractéristique suivi de la dimension des sous-espaces propres. On attend sur ce thème de réduction une certaine efficacité dans l'utilisation des méthodes de diagonalisation.

Q 40. Cette question a été bien traitée par de nombreux candidats. Cependant, un nombre non négligeable d'entre eux semble n'avoir jamais résolu un système différentiel à coefficients constants.

Conclusion

Cette épreuve autorise la calculatrice. Elle constitue une aide au calcul et est un outil de vérification, elle peut être aussi un point du raisonnement. Nous conseillons aux candidats de l'intégrer le plus possible dans leur préparation.

Le jury a rencontré un nombre conséquent de très bonnes copies qui progressent efficacement et proposent une rédaction claire et argumentée. Cependant, un grand nombre de candidats ont abordé beaucoup de questions, au risque d'en bâcler certaines. La partie probabilité est mal maitrisée, les calculs avec l'exponentielle complexe incertains et la partie algèbre linéaire souvent confuse ou dénuée de sens.

Apprendre et comprendre le cours reste essentiel pour pouvoir le restituer avec précision lors d'une épreuve de concours. On doit aussi retenir des règles et des méthodes mais il faut comprendre et savoir quand les utiliser. Travailler le cours à l'aide de nombreux exercices sur toutes les parties du programme des deux années de classe préparatoire, reste incontournable.